Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2014, № 3(117) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.21

ВЕЛИКІ ВІДХИЛЕННЯ ДЛЯ ВИПАДКОВОЇ ЕВОЛЮЦІЇ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ПРИРОСТАМИ В СХЕМІ ПУАССОНОВОЇ АПРОКСИМАЦІЇ З РОЗЩЕПЛЕННЯМ ТА ПОДВІЙНИМ УКРУПНЕННЯМ

І. В. Самойленко, Ю. В. Шушарін

Резюме. В роботі проведено асимптотичний аналіз проблеми великих відхилень для випадкової еволюції з незалежними приростами в схемі пуассонової апроксимації з розщепленням та подвійним укрупненням. Великі відхилення для випадкової еволюції з незалежними приростами визначаються експоненційним генератором для стрибкового процесу з незалежними приростами.

Вступ

В роботі проведено асимптотичний аналіз проблеми великих відхилень для випадкових еволюцій з незалежними приростами в схемі пуассонової апроксимації з розщепленням та подвійним укрупненням (див. [5]). Така постановка задачі є новою та досі недослідженою.

Асимптотичний аналіз проблеми великих відхилень для випадкових еволюцій з незалежними приростами в схемі пуассонової апроксимації проведено в роботі [6].

В монографії [2] для дослідження проблеми великих відхилень розвинуто ефективний метод, побудований на теорії збіжності експоненційних (нелінійних) операторів. В роботах [7, 8] експоненційний оператор в схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$) має вигляд:

$$\mathbb{H}^\varepsilon \varphi(x) := e^{-\varphi(x)/\varepsilon} \varepsilon \mathbb{L}^\varepsilon e^{\varphi(x)/\varepsilon},$$

де оператори $\mathbb{L}^\varepsilon, \varepsilon > 0$, визначають марковські процеси $x^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$, в схемі серій.

Випадкові еволюції з незалежними приростами (див. [5]) задаються співвідношенням

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \eta(ds; x^\varepsilon(s)),\ t \geq 0. \tag{1}$$

Тут марковські процеси з незалежними приростами $\eta(t; x)$, $t \geq 0$, $x \in E$, задаються генераторами

$$\Gamma(x)\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}} [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\Gamma(dv; x),\ x \in E.$$

Перемикаючий марковський процес $x^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$ визначається на стандартному фазовому просторі $(E, \mathcal{E})$ з розщепленням

$$E = \bigcup_{k=1}^{N} E_k, E_k \cap E_{k'} = \emptyset, k \neq k'$$

в схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$.

Марковське ядро має вигляд

$$Q^\varepsilon(x, B, t) = P^\varepsilon(x, B)[1 - e^{-q(x)t}],\ x \in E,\ B \in \mathcal{E},\ t \geq 0.$$

Також виконуються такі умови:

ME1:: Ядро, що описує перехідні імовірності вкладеного ланцюга Маркова $x_n^\varepsilon, n \geq 0$ має представлення

$$P^\varepsilon(x, B) = P(x, B) + \varepsilon P_1(x, B).$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ на розщепленому фазовому просторі визначається так:

$$P(x, E_k) = \mathbf{1}_k(x) := \begin{cases} 1, x \in E_k, \\ 0, x \notin E_k. \end{cases}$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ визначає супроводжуючий ланцюг Маркова $x_n, n \geq 0$ на відокремлених класах $E_k, 1 \leq k \leq N$. Крім того, збурююче ядро $P_1(x, B)$ задовольняє умові

$$P_1(x, E) = 0,$$

що є прямим наслідком рівності $P^\varepsilon(x, E) = P(x, E) = 1$.

ME2:: Асоційований марковський процес $x^0(t), t \geq 0$, заданий генератором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]$$

є рівномірно ергодичним на кожному з класів $E_k, 1 \leq k \leq N$, зі стаціонарними розподілами $\pi_k(dx), 1 \leq k \leq N$, які задовольняють співвідношення:

$$\pi_k(dx)q(x) = q_k\rho_k(dx),\ q_k := \int_{E_k} \pi_k(dx)q(x).$$

ME3:: Усереднені імовірності виходу

$$\widehat{p}_k := \int_{E_k} \rho_k(dx)P_1(x, E \backslash E_k) > 0, 1 \leq k \leq N$$

є додатними, крім того

$$0 < q(x) < +\infty.$$

Таким чином, збурююче ядро $P_1(x, B)$ визначає перехідні імовірності між класами $E_k, 1 \leq k \leq N$. Отже, рівність $P^\varepsilon(x, B) = P(x, B) + \varepsilon P_1(x, B)$ означає, що вкладений ланцюг Маркова x_n^ε, $n \geq 0$ проводить довгий час в кожному з класів E_k та перестрибує між класами з малими імовірностями $\varepsilon P_1(x, E \backslash E_k)$.

За умов **ME1—ME3** має місце слабка збіжність [5, ch. 4]

$$v(x^\varepsilon(t/\varepsilon)) \Rightarrow \widehat{x}(t), \varepsilon \to 0,\ v(x) = k \in \widehat{E} = \{1, ..., N\},\ x \in E_k.$$

Граничний марковський процес $\widehat{x}(t), t \geq 0$ на укрупненому фазовому просторі $\widehat{E} = \{1, ..., N\}$ визначається генеруючою матрицею

$$\widehat{Q}_1 = (\widehat{q}_{kr}, 1 \leq k, r \leq N),$$

де:

$$\widehat{q}_{kr} = \widehat{q}_k \widehat{p}_{kr},\ k \neq r,\ \widehat{q}_k = q_k \widehat{p}_k,\ 1 \leq k \leq N.$$

$$\widehat{p}_{kr} = p_{kr}/\widehat{p}_k,\ p_{kr} = \int_{E_k} \rho_k(dx) P_1(x, E_r),\ 1 \leq k, r \leq N, k \neq r,$$

$$\widehat{p}_k = -\int_{E_k} \rho_k(dx) P_1(x, E_k).$$

ME4:: Укрупнений марковський процес $\widehat{x}(t), t \geq 0$ є ергодичним, зі стаціонарним розподілом $\widehat{\pi} = (\pi_k, k \in \widehat{E})$.

Таким чином, оператор Q^ε можна подати у вигляді:

$$Q^\varepsilon = Q + \varepsilon Q_1,\ Q_1(x) = q(x) \int_E P_1(x, dy)\varphi(y).$$

Нехай Π — проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора Q. Його дія на тест-функції φ визначається так:

$$\Pi\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} \widehat{\varphi}_k \mathbf{1}_k(x),\ \widehat{\varphi}_k := \int_{E_k} \pi_k(dx)\varphi(x).$$

Має місце співвідношення

$$Q\Pi = \Pi Q = 0.$$

Потенційний оператор ([5], ch. 1)

$$R_0 := \Pi - (Q + \Pi)^{-1} = (\Pi - Q)^{-1} - \Pi$$

має властивість

$$QR_0 = R_0 Q = \Pi - I.$$

Означимо зведений оператор $\widehat{Q}_1$ за допомогою співвідношення

$$\widehat{Q}_1 \Pi = \Pi Q_1 \Pi.$$

Нехай $\widehat{\Pi}$ — проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора $\widehat{Q}_1$:

$$\widehat{\Pi}\widehat{\varphi} := \sum_{k \in \widehat{E}} \widehat{\pi}_k \widehat{\varphi}_k.$$

Означимо потенціальну матрицю $\widehat{R}_0 = [\widehat{R}^0_{kl};\ 1 \leq k,\ l \leq N]$ такими співвідношеннями:

$$\widehat{Q}_1 \widehat{R}_0 = \widehat{R}_0 \widehat{Q}_1 = \widehat{\Pi} - I.$$

Випадкова еволюція (1) характеризується генератором двохкомпонентного марковського процесу $\xi(t)$, $x^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$ (див. [5], ch. 2])

$$\mathbb{L}\varphi(u, x) = Q^\varepsilon \varphi(\cdot, x) + \Gamma(x)\varphi(u, \cdot) =$$

$$= Q\varphi(\cdot, x) + \varepsilon Q_1\varphi(\cdot, x) + \Gamma(x)\varphi(u, \cdot) \qquad (2)$$

Зауваження 1. *Дослідження граничних властивостей марковських процесів базується на мартингальній хараteризації таких процесів, а саме розглядаються мартингали*

$$\mu_t = \varphi(x(t)) - \varphi(x(0)) - \int_0^t \mathbb{L}\varphi(x(s))ds, \qquad (3)$$

де $\mathbb{L}$ *— генератор на банаховому просторі* $\mathcal{B}_E$ *дійснозначних обмежених тест-функцій* $\varphi(x) \in E$, *з нормою* $\|\varphi\| := \sup_{x\in E} |\varphi(x)|$, *що визначає марковський процес* $x(t)$, $t \geq 0$, *на стандартному фазовому просторі* $(E, \mathcal{E})$.

Теорія великих відхилень базується на використанні експоненційної мартингальної характеризації (див. [2], *ch.1):*

$$\widetilde{\mu}_t = \exp\{\varphi(x(t)) - \varphi(x(0)) - \int_0^t \mathbb{H}\varphi(x(s))ds\} \qquad (4)$$

є мартингалом.

Тут експоненційний нелінійний оператор

$$\mathbb{H}\varphi(x) := e^{-\varphi(x)}\mathbb{L}e^{\varphi(x)},\ \varphi(x) \in \mathcal{B}_E.$$

Еквівілентність співвідношень (3) *та* (4) *випливає з такого:*

Твердження (див. [1], с.66). *Нехай* $x(t)$ *та* $y(t)$ *дійснозначні, неперервні справа процеси, асоційовані з потоком* σ*-алгебр* $\{\mathcal{F}_t\}$. *Припустимо, що для будь-якого* t, $\inf\limits_{s\leq t} x(s) > 0$. *Тоді*

$$\mu(t) = x(t) - \int_0^t y(s)ds$$

є $\{\mathcal{F}_t\}$*-локальним мартингалом, тоді і тільки тоді, коли*

$$\widetilde{\mu}(t) = x(t)exp\left\{-\int_0^t \frac{y(s)}{x(s)}ds\right\} \text{ є } \{\mathcal{F}_t\} \text{ –локальний мартингал.}$$

Проблема великих відхилень, як правило, реалізується в 4 етапи ([2], ch.2):

1. Обчислення граничного експоненційного (нелінійного) оператора, що визначає великі відхилення.
2. Визначення експоненційної компактності.
3. Визначення принципу порівняння для граничного оператора.
4. Конструкція варіаційного представлення функціоналу дії, що розв'язує проблему великих відхилень.

Етапи (2)—(4) для експоненційного генератора, що відповідає процесам з незалежними приростами, реалізовано в монографії [2]. Важливо, що граничний генератор, який виникає при дослідженні випадкової еволюції, співпадає з генератором, що відповідає процесу з незалежними приростами без перемикань.

Отже, для випадкової еволюції, яка розглядається в статті і для відповідного граничного генератора всі необхідні технічні умови (етапи 2—4) вже досліджені в монографії [2]. А саме, питання експоненційної компактності для процесів з незалежними приростами розглянуто в прикладах 1.5, 4.23 та в пп. 10.1.2 та 10.3.2; перевірка принципу порівняння для граничного експоненційного генератора вигляду $\widehat{H}^0\varphi(u) = H^0(\varphi'(u))$ (див. нижче (7)) проведена в пп. 10.1.3 із застосуванням леми 9.15; варіаційне представлення граничного експоненційного генератора проведено в пп. 10.1.5 на с.200 із застосуванням теореми 8.14.

Зауваження 2. *Деякі з вказаних етапів реалізовано також в монографії* [3]*, де проблема великих відхилень досліджується з використанням кумулянти процесу з незалежними приростами. Зв'язок між кумулянтою та експоненційним генератором випливає з наступного.*

Генератор марковського процесу можна подати у вигляді

$$\mathbb{L}\varphi(x) = \int_R e^{\lambda x} a(\lambda)\overline{\varphi}(\lambda) d\lambda,$$

де $a(\lambda)$ *— кумулянта процессу,* $\overline{\varphi}(\lambda) = \int_R e^{\lambda x}\varphi(x)dx$.

Зворотне перетворення дає

$$\int_R e^{-\lambda x}\mathbb{L}\varphi(x)dx = a(\lambda)\overline{\varphi}(\lambda).$$

Перепишемо

$$\int_R e^{-\lambda x}\mathbb{L}\varphi(x)dx = \int_R e^{-\lambda x} a(\lambda)\varphi(x)dx$$

та за допомогою заміни

$$e^{-\lambda x}\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x)$$

отримаємо

$$\int_R e^{-\lambda x}\mathbb{L}e^{\lambda x}\widetilde{\varphi}(x)dx = \int_R a(\lambda)\widetilde{\varphi}(x)dx.$$

Таким чином,

$$e^{-\lambda x}\mathbb{L}e^{\lambda x} = a(\lambda),$$

або через експоненційний генератор

$$\mathbb{H}\varphi_0(x) = a(\lambda), \quad \text{де } \varphi_0(x) = \lambda x.$$

В роботах [7, 8] В. С. Королюк запропонував метод розв'язання проблеми сингулярного збурення при дослідженні великих відхилень для випадкових еволюцій з незалежними приростами в схемі асимптотично малої дифузії.

В класичних роботах асимптотичний аналіз проблеми великих відхилень виконується, як правило, з використанням великого параметра серії $n \to \infty$, а іноді навіть кількох різних параметрів (див. напр. [9]).

Нормування випадкової еволюції (1) малим параметром серії для розв'язання проблеми великих відхилень в схемі пуассонової апроксимації реалізується таким чином:

$$\xi_\varepsilon^\delta(t) = \xi_\varepsilon^\delta(0) + \int_0^t \eta_\varepsilon^\delta(ds; x^\varepsilon(s/\varepsilon^3)),\ t \geq 0,$$

$$\eta_\varepsilon^\delta(t) = \varepsilon\eta^\delta(t/\varepsilon^2),$$

$$\Gamma_\varepsilon^\delta(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-2}\int_{\mathbb{R}} [\varphi(u+\varepsilon v) - \varphi(u)]\Gamma^\delta(dv; x),\ x \in E,$$

де $\varepsilon, \delta \to 0$ так що $\varepsilon^{-1}\delta \to 1$.

1. Основні умови пуассонової апроксимації

C1: *Пуассонова апроксимація.* Сім'я процесів з незалежними приростами $\eta^\delta(t; x)$, $x \in E$, $t \geq 0$ задовольняє умови пуассонової апроксимації:

PA1: Апроксимация середніх:

$$a_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} v\Gamma^\delta(dv; x) = \delta[a(x) + \theta_a^\delta(x)]$$

та

$$c_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} v^2\Gamma^\delta(dv; x) = \delta[c(x) + \theta_c^\delta(x)],$$

де

$$\sup_{x\in E}|a(x)| \leq a < +\infty, \sup_{x\in E}|c(x)| \leq c < +\infty.$$

PA2: Для ядра інтенсивностей має місце асимптотичне представлення

$$\Gamma_g^\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} g(v)\Gamma^\delta(dv; x) = \delta[\Gamma_g(x) + \theta_g^\delta(x)]$$

для всіх $g \in C_3(\mathbb{R})$ — класу функцій, що визначає міру (див. [4], ch. 7), $\Gamma_g(x)$ — обмежене ядро,

$$|\Gamma_g(x)| \leq \Gamma_g \quad \text{(константа залежна від } g).$$

Ядро $\Gamma^0(dv; x)$ задано на класі функцій, що визначає міру $C_3(\mathbb{R})$ співвідношенням

$$\Gamma_g(x) = \int_{\mathbb{R}} g(v)\Gamma^0(dv; x), \quad g \in C_3(\mathbb{R}).$$

Знехтувально малі доданки θ_a^δ, θ_c^δ, θ_g^δ задовольняють умову

$$\sup_{x\in E}|\theta_\cdot^\delta(x)| \to 0, \quad \delta \to 0.$$

PA3: Має місце співвідношення

$$c(x) := \int_{\mathbb{R}} v^2 \Gamma^0(dv; x),$$

що зумовлює відсутність дифузійної складової в експоненційному генераторі, який визначає розв'язання проблеми великих відхилень.

C2: *Рівномірна квадратична інтегровність*:

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{x\in E} \int_{|v|>c} v^2 \Gamma^0(dv; x) = 0.$$

C3: *Експоненційна обмеженість*:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{p|v|} \Gamma^\delta(dv; x) < \infty, \forall p \in \mathbb{R}.$$

2. Основний результат

Теорема 1. *Розв'язання проблеми великих відхилень для випадкової еволюції*

$$\xi_\varepsilon^\delta(t) = \xi_\varepsilon^\delta(0) + \int_0^t \eta_\varepsilon^\delta(ds; x^\varepsilon(s/\varepsilon^3)),\ t \geq 0,$$

яка задається генератором двохкомпонентного марковського процесу $\xi_\varepsilon^\delta(t),\ x^\varepsilon(t),\ t \geq 0$

$$\mathbb{L}_\varepsilon^\delta \varphi(u, x) = \varepsilon^{-3} Q\varphi(\cdot, x) + \varepsilon^{-2} Q_1 \varphi(\cdot, x) + \Gamma_\varepsilon^\delta(x)\varphi(u, \cdot), \tag{5}$$

де

$$\Gamma_\varepsilon^\delta(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-2} \int_{\mathbb{R}} [\varphi(u + \varepsilon v) - \varphi(u)] \Gamma^\delta(dv; x),\ x \in E \tag{6}$$

і $\varepsilon, \delta \to 0$ *так, що* $\varepsilon^{-1}\delta \to 1$ *визначається експоненційним генератором*

$$\widehat{H}^0 \varphi(u) = \widehat{\widehat{a}} \varphi'(u) + \int_{\mathbb{R}} [e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u)] \widehat{\widehat{\Gamma^0}}(dv), \varphi(u) \in C^3(\mathbb{R}), \tag{7}$$

$$\widehat{\widehat{a}} = \sum_{k=1}^N \widehat{\pi}_k \int_{E_k} \pi_k(dx) a(x), \quad \widehat{\widehat{\Gamma^0}}(v) = \sum_{k=1}^N \widehat{\pi}_k \int_{E_k} \pi_k(dx) \Gamma^0(v; x).$$

Зауваження 3: *Великі відхилення для випадкових еволюцій в схемі пуассонової апроксимації визначаються експоненційним генератором для стрибкового процесу з незалежними приростами. Вичерпне дослідження проблеми випадкових відхилень для стрибкового процесу з незалежними приростами викладено в монографіях* [3, 2].

Для доведення теореми використовуємо таку лему.

Лема 1. *Експоненційний генератор в схемі серій*

$$H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = e^{-\varphi/\varepsilon} \varepsilon \Gamma_\varepsilon^\delta(x) e^{\varphi/\varepsilon} \tag{8}$$

має таке асимптотичне представлення

$$H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = H_\Gamma(x)\varphi(u) + \theta_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де $\sup_{x\in E}|\theta_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)| \to 0,\ \varepsilon,\delta\to 0,$

$$H_\Gamma(x)\varphi(u)=a(x)\varphi'(u)+\int_{\mathbb{R}}[e^{v\varphi'(u)}-1-v\varphi'(u)]\Gamma^0(dv;x).$$

Доведення. Перепишемо (8), враховуючи вигляд генератора (6). Маємо

$$H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u)=\varepsilon^{-1}\int_{\mathbb{R}}[e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)}-1]\Gamma^\delta(dv;x),$$

де

$$\Delta_\varepsilon\varphi(u):=\varepsilon^{-1}[\varphi(u+\varepsilon v)-\varphi(u)].$$

Перепишемо вираз для генератора таким чином:

$$H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u)=\varepsilon^{-1}\int_{\mathbb{R}}[e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)}-1-\Delta_\varepsilon\varphi(u)-\frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2]\Gamma^\delta(dv;x)+$$
$$+\varepsilon^{-1}\int_{\mathbb{R}}[\Delta_\varepsilon\varphi(u)+\frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2]\Gamma^\delta(dv;x).$$

Легко бачити, що функція $\psi_u^\varepsilon(v)=e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)}-1-\Delta_\varepsilon\varphi(u)-\frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2$ належить класу $C_3(\mathbb{R})$. Дійсно,

$$\psi_u^\varepsilon(v)/v^2\to 0,\ v\to 0$$

рівномірно по u, оскільки $\varphi(u)\in C^3(\mathbb{R})$. Крім того, функція $\psi_u^\varepsilon(v)$ неперервна і обмежена для кожного ε завдяки обмеженості функції $\varphi(u)$. Більше того, обмеженість функції $\psi_u^\varepsilon(v)$ є рівномірною по u завдяки умовам **C2, C3** та обмеженості похідної $\varphi'(u)$.

Таким чином, маємо

$$H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u)=\varepsilon^{-1}\delta\int_{\mathbb{R}}[e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)}-1-\Delta_\varepsilon\varphi(u)-\frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2]\Gamma^0(dv;x)+$$
$$+\varepsilon^{-1}\int_{\mathbb{R}}[\Delta_\varepsilon\varphi(u)-v\varphi'(u)-\varepsilon\frac{v^2}{2}\varphi''(u)]\Gamma^\delta(dv;x)+\varepsilon^{-1}\delta a(x)\varphi'(u)+\delta c(x)\varphi''(u)+$$
$$+\varepsilon^{-1}\int_{\mathbb{R}}[\frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2-\frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2]\Gamma^\delta(dv;x)+\varepsilon^{-1}\delta\frac{1}{2}c(x)(\varphi'(u))^2.$$

Застосовуючи формулу Тейлора до тест-функцій $\varphi(u)\in C^3(\mathbb{R})$ та умову **PA2**, отримаємо

$$H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u)=\varepsilon^{-1}\delta\int_{\mathbb{R}}[e^{v\varphi'(u)}-1-v\varphi'(u)-\frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2]\Gamma^0(dv;x)+$$
$$+\varepsilon^{-1}\delta\int_{\mathbb{R}}(e^{v\varphi'(u)}\varepsilon\frac{v^2}{2}\varphi''(\widetilde{u})-\varepsilon\frac{v^2}{2}\varphi''(\widetilde{u})-\varepsilon^2\frac{v^4}{8}(\varphi''(\widetilde{u}))^2)\Gamma^0(dv;x)+$$
$$+\varepsilon^{-1}\delta\int_{\mathbb{R}}\varepsilon^2\frac{v^3}{3!}\varphi'''(\widetilde{u})\Gamma^0(dv;x)+\varepsilon^{-1}\delta a(x)\varphi'(u)+\delta c(x)\varphi''(u)+$$
$$+\varepsilon^{-1}\delta\int_{\mathbb{R}}\varepsilon^2\frac{v^4}{4}(\varphi''(\widetilde{u}))^2\Gamma^0(dv;x)+\varepsilon^{-1}\delta\frac{1}{2}c(x)(\varphi'(u))^2.$$

Враховуючи **PA3** та граничну умову $\varepsilon^{-1}\delta\to 1$, остаточно маємо

$$H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u)=H_\Gamma(x)\varphi(u)+\theta_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де $\sup\limits_{x\in E}|\theta_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)| \to 0,\ \varepsilon,\delta \to 0.$

Лему доведено. □

Доведення. Граничний перехід в експоненційному нелінійному генераторі винадкової еволюції реалізується на збурених тест-функціях

$$\varphi_\varepsilon^\delta(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon \ln[1 + \delta\varphi_1(u,x) + \delta^2\varphi_2(u,x)].$$

Таким чином, маємо

$$\mathbb{H}_\varepsilon^\delta \varphi^\varepsilon = e^{-\varphi^\varepsilon/\varepsilon}\varepsilon\mathbb{L}_\varepsilon^\delta e^{\varphi^\varepsilon/\varepsilon} = e^{-\varphi/\varepsilon}[1+\delta\varphi_1+\delta^2\varphi_2]^{-1}\varepsilon\mathbb{L}_\varepsilon^\delta e^{\varphi/\varepsilon}[1+\delta\varphi_1+\delta^2\varphi_2].$$

Обчислення асимптотичної поведінки останнього експоненційного генератора дає такий результат.

Лема 2. *Має місце асимптотичне представлення*

$$\mathbb{H}_\varepsilon^\delta \varphi^\varepsilon = \varepsilon^{-1}Q\varphi_1 + Q\varphi_2 + Q_1\varphi_1 - \varphi_1 Q\varphi_1 + H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) + \theta^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де $\sup\limits_{x\in E}|\theta^{\varepsilon,\delta}(x)| \to 0,\ \varepsilon,\delta \to 0.$

Доведення. Враховуючи (5) та граничне співвідношення $\varepsilon^{-1}\delta \to 1$, $\varepsilon,\delta \to 0$, маємо

$$\mathbb{H}_\varepsilon^\delta\varphi^\varepsilon = e^{-\varphi/\varepsilon}[1-\delta\varphi_1+\frac{\delta^2\varphi_1^2}{1+\delta\varphi_1}]\left\{\varepsilon^{-2}Q+\varepsilon^{-1}Q_1+\varepsilon\Gamma_\varepsilon^\delta(x)\right\}e^{\varphi/\varepsilon}[1+\delta\varphi_1+\delta^2\varphi_2] =$$

$$= e^{-\varphi/\varepsilon}[1-\delta\varphi_1+\delta^2\frac{\varphi_1^2-\varphi_2+\delta\varphi_1\varphi_2}{1+\delta\varphi_1+\delta^2\varphi_2}]\left\{\varepsilon^{-2}\delta e^{\varphi/\varepsilon}Q\varphi_1 + \varepsilon^{-2}\delta^2 e^{\varphi/\varepsilon}Q\varphi_2 + \right.$$

$$+\varepsilon^{-1}\delta e^{\varphi/\varepsilon}Q_1\varphi_1 + \varepsilon^{-1}\delta^2 e^{\varphi/\varepsilon}Q_1\varphi_2 + \varepsilon\Gamma_\varepsilon^\delta(x)e^{\varphi/\varepsilon} + \varepsilon\delta\Gamma_\varepsilon^\delta(x)e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_1 +$$

$$\left. +\varepsilon\delta^2\Gamma_\varepsilon^\delta(x)e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_2\right\} = \varepsilon^{-1}Q\varphi_1 + Q\varphi_2 + Q_1\varphi_1 - \varphi_1 Q\varphi_1 + H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) + \theta^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де

$$\theta^{\varepsilon,\delta}(x) = \delta\left[Q_1\varphi_2 - \varphi_1 Q\varphi_2 - \varphi_1 Q_1\varphi_1 - \delta\varphi_1 Q_1\varphi_2 + e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon\Gamma_\varepsilon^\delta(x)e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_1 + \right.$$

$$+\delta e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon\Gamma_\varepsilon^\delta(x)e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_2 - \varphi_1 e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon\Gamma_\varepsilon^\delta(x)e^{\varphi/\varepsilon} - \delta\varphi_1 e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon\Gamma_\varepsilon^\delta(x)e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_1 -$$

$$-\delta^2\varphi_1 e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon\Gamma_\varepsilon^\delta(x)e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_2 + \frac{\varphi_1^2-\varphi_2+\delta\varphi_1\varphi_2}{1+\delta\varphi_1+\delta^2\varphi_2}\left\{\varepsilon^{-2}\delta^2 Q\varphi_1 + \varepsilon^{-2}\delta^3 Q\varphi_2 + \right.$$

$$+\varepsilon^{-1}\delta^2 Q_1\varphi_1 + +\varepsilon^{-1}\delta^3 Q_1\varphi_2 + \delta e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon\Gamma_\varepsilon^\delta(x)e^{\varphi/\varepsilon} + \delta^2 e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon\Gamma_\varepsilon^\delta(x)e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_1 +$$

$$\left.\left. +\delta^3 e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon\Gamma_\varepsilon^\delta(x)e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_2\right\}\right].$$

Лему доведено.

□

Враховуючи лему 1, маємо

$$\mathbb{H}^{\varepsilon,\delta}\varphi^\varepsilon = \varepsilon^{-1}Q\varphi_1 + Q\varphi_2 + Q_1\varphi_1 - \varphi_1 Q\varphi_1 + H_\Gamma(x)\varphi(u) + h^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де $h^{\varepsilon,\delta}(x) = \theta^{\varepsilon,\delta}(x) + \theta_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x).$

Тепер використовуємо розв'язок задачі сингулярного збурення (див. [5], ch. 1) для системи рівнянь

$$Q\varphi_1 = 0,$$
$$Q\varphi_2 + Q_1\varphi_1 - \varphi_1 Q\varphi_1 + H_\Gamma(x)\varphi(u) = H^0\varphi(u).$$

З першого рівняння маємо $\varphi_1(u,x) = \varphi_1(u,\widehat{x}) \in N_Q$, тому з умови розв'язності для другого рівняння

$$\widehat{Q}_1\widehat{\varphi}_1 + \widehat{H}_\Gamma(x)\varphi(u) = H^0\varphi(u),$$

де

$$H^0\varphi(u) = \Pi Q_1 \Pi\varphi_1 + \Pi H_\Gamma(x)\Pi\varphi(u).$$

Застосуємо тепер умову розв'язності для останнього рівняння. Маємо

$$\widehat{Q}_1\widehat{\varphi}_1 + \widehat{H}_\Gamma(x)\varphi(u) = H^0\varphi(u).$$

Отже,

$$\widehat{Q}_1\widehat{\varphi}_1 = H^0\varphi(u) - \widehat{H}_\Gamma(x)\varphi(u),$$

а для того, щоб це рівняння було розв'язним відносно $\widehat{\varphi}_1$ права частина має належати простору значень оператора $\widehat{Q}_1$, тобто має виконуватись умова

$$\widehat{\Pi}[H^0 - \widehat{H}_\Gamma(x)]\widehat{\Pi}\varphi(u) = 0,$$

звідки остаточно отримуємо (7).

Теорему доведено.

□

Висновки

В статті вперше поставлено та розв'язано проблему великих відхилень в схемі фазового укрупнення для випадкової еволюції з незалежними приростами. Запропоновано алгоритм, що дозволяє визначити нелінійний експоненційний генератор, який розв'язує проблему великих відхилень. Показано, що граничний експоненційний генератор є класичним експоненційним генератором стрибкового процесу.

Література

1. Ethier S. N., Kurtz T. G. Markov Processes: Characterization and convergence // J. , — New York: Wiley & Sons, 1986.
2. Feng J., Kurtz T. G. Large Deviation for Stochastic Processes // AMS, 131, RI. —2006.
3. Freidlin M. J., Wentzel A. D. Random Perturbation of Dynamical Systems — Berlin: Springer-Verlag, 1998.
4. Jacod J., Shiryaev A. N. Limit Theorems for Stochastic Processes — Berlin: Springer-Verlang, 1987.
5. Koroliuk V. S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space // WSP. —2005.
6. Самойленко І.В. Великі відхилення для випадкових еволюцій з незалежними приростами в схемі пуасонової апроксимації // Теорія ймовірностей та математична статистика. —2011, — С. 95–101.

7. Королюк В. С. Марковские случайные эволюции с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии // Допов. НАН України. —2010, №. 6, — С. 22–26.
8. Королюк В. С. Проблема великих відхилень для марковських випадкових еволюцій з незалежними приростами у схемі асимптотично малої дифузії // Укр. матем. журн. —2010, №. 5, — С. 643–650.
9. Mogulskii A. A. Large deviation for processes with independent increments // Ann. Prob. —1993, — P. 202–215.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.
Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, пр-т Перемоги, 54/1, м. Київ, 03680, Україна.

Надійшла 05.10.2014